VERALLGEMEINERUNG EINER ISOPERIMETRISCHEN AUFGABE VON ERHARD SCHMIDT AUF RIEMANNSCHE RÄUME KONSTANTER KRÜMMUNG

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Wolfgang Spiegel

aus Berlin

1970

VERALLGEMEINERUNG EINER ISOPERIMETRISCHEN AUFGABE VON ERHARD SCHMIDT AUF RIEMANNSCHE RÄUME KONSTANTER KRÜMMUNG

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Wolfgang Spiegel

aus Berlin

1. Referent: Prof. Dr. Dinghas

2. Referent: Prof. Dr. Orsinger

Tag der mündlichen Prüfung: 6. 2. 1970

Tag der Promotion: 16. MRZ. 1970

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Herrn Prof. Dr. Dinghas möchte ich an dieser Stelle meinen aufrichtigen Dank aussprechen. Seine Vorlesungen und Arbeiten trugen wesentlich dazu bei, meine mathematischen Kenntnisse zu erweitern.

Vorwort:

Das Verfahren der sogenannten "Steinerschen Symmetrisierung" ist eine bekannte Methode zum Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel, die von A. Dinghas in seinen Arbeiten [3], [4] auf euklidische Räume bzw. Riemannsche Räume konstanter Krümmung von n Dimensionen verallgemeinert wurde. Weiterhin brauchen die zu symmetrisierenden Körper nicht mehr konvex zu sein, sondern es werden beliebige kompakte Punktmengen zugelassen. Mithin muß also in diesem allgemeinen Fall der Lebesguessche Maßbegriff zugrunde gelegt werden.

In der vorliegenden Arbeit will ich unter Anwendung der Steinerschen Symmetrisierung eine isoperimetrische Aufgabe von Erhard Schmidt für reguläre Körper in Riemannschen Räumen konstanter Krümmung lösen. Hierbei verwende ich ein Resultat von A. Dinghas [2].

Die Schmidtsche Aufgabe wird folgendermaßen formuliert: Wir betrachten die Teilmenge aller Punkte $(x_1,\ldots,x_{n+1})$ des euklidischen Raumes E^{n+1}, die der Gleichung

$$(1) \qquad x_1^2 + \ldots + x_n^2 + \frac{x_{n+1}^2}{K} = \frac{1}{K} \qquad K \neq 0$$

genügen. Dieser Raum stellt einen n - dimensionalen Riemannschen Raum konstanter Krümmung K dar (R^n). Mit Z(a,b) bezeichnen wir die Menge aller Punkte, die den

Ungleichungen

$$(2)\qquad \frac{\sin^2\sqrt{K}\,a}{\sqrt{K}} \leq x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 \leq \frac{\sin^2\sqrt{K}\,b}{\sqrt{K}} \qquad a \neq b$$

genügen. Es soll unter allen "zulässigen" Körpern, die in Z(a,b) einbeschrieben sind, derjenige bestimmt werden, der unter vorgegebener Oberfläche das Maximum an Volumen einnimmt. Dabei versteht A. Dinghas unter einem "zulässigen" Körper eine Punktmenge des R^n, die den Bedingungen genügt:

1.) Der Körper ist regulär im Sinne von Erhard Schmidt.
2.) Der Körper ist vollständig in Z(a,b) einbeschrieben, d. h. seine Projektion längs einer noch zu definierenden Achse ist der Zylinder Z(a,b).
3.) Der Körper besitzt auf dem Rande von (2) eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit, die seine Oberfläche in zwei Teile zerlegt, so daß man vom einen Teil der Oberfläche zum anderen nur über die zusammenhängende Mannigfaltigkeit des Randes von Z(a,b) kommt.

Für diese Punktmengen hat A. Dinghas das Schmidtsche Problem vollständig gelöst. In dieser Arbeit wird nun gezeigt, daß zur Lösung der Schmidtschen Aufgabe die Voraussetzung 3.) entbehrlich ist. Der Gedankengang des Beweises läuft darauf hinaus, einen Körper, der den Voraussetzungen 1.) und 2.) genügt, geeignet nach Steiner zu symmetrisieren, so daß der symmetrisierte

Körper im Sinne von A. Dinghas zulässig wird. Auf diesen kann man das bekannte Ergebnis von A. Dinghas anwenden und über die Eigenschaften der Steinerschen Symmetrisierung auf den Extremfall schließen.

So werden also im ersten Kapitel die von Erhard Schmidt eingeführten regulären Körper studiert. Hierzu bekommt nach A. Dinghas [2] der betrachtete Riemannsche Raum eine verallgemeinerte Polarkoordinatendarstellung. Zur Vermeidung überflüssiger Rechnereien betrachte ich erst den Fall $K > 0$ (elliptisch - sphärischer Fall). Die negative Krümmung $K < 0$ (hyperbolischer Fall) wird am Schluß des dritten Kapitels behandelt. Mit Hilfe dieser Polarkoordinatendarstellung kann man die Schmidtsche Aufgabe genau formulieren, und es wird im dritten Abschnitt gleichsam als Folgerung aus der Schmidtschen Theorie ein Normalensystem zu jedem regulären Körper konstruiert, auf das wir im dritten Kapitel wieder zurückkommen müssen. Diese Vorschrift zur Konstruktion der Normalen gilt unter der Voraussetzung, daß der Rand des Körpers stückweise regulär ist, und ich habe, um das zu unterstreichen, im zweiten Kapitel bei der Steinerschen Symmetrisierung Punktmengen einer viel allgemeineren Klasse zugelassen. Hier wird zunächst eine Abbildung kompakter, zusammenhängender Mengen in einen euklidischen Raum mit ihren Eigenschaften diskutiert, die A. Dinghas in seiner Arbeit [4] eingeführt hat. Dabei ergibt sich sofort, wie in natürlicher Weise in

Riemannschen Räumen konstanter Krümmung zu symmetrisieren ist. Die Tatsache, daß hierbei das Volumen des betrachteten Körpers erhalten bleibt und seine Oberfläche verkleinert wird, soll im dritten Kapitel zur Lösung der Schmidtschen Aufgabe ausgenutzt werden, wo ich für symmetrische Körper eine fundamentale isoperimetrische Gleichung von A. Dinghas [2] herleite. Daraus werden dann im zweiten Abschnitt die nötigen Folgerungen für den allgemeineren Körper gezogen. Im dritten Abschnitt gebe ich dann noch den Beweisgedanken für den hyperbolischen Fall an.

Inhaltsverzeichnis

Seite

Vorwort ..... I - IV

I. Kapitel: Die regulären Körper von Erhard Schmidt. 1

1.) Definition des regulären Körpers in Riemannschen Räumen konstanter Krümmung 4

2.) Formulierung der Schmidtschen Aufgabe 7

3.) Konstruktion eines Normalensystems 10

II. Kapitel: Die Steinersche Symmetrisierung 15

1.) Abbildung regulärer Körper in einen euklidischen Modellraum 15

2.) Eigenschaften dieser Abbildung 21

3.) Symmetrisierung 24

4.) Eigenschaften der Symmetrisierung 27

III. Kapitel: Die Lösung der Schmidtschen Aufgabe .. 29

1.) Herleitung einer isoperimetrischen Gleichung 29

2.) Folgerungen aus dieser Gleichung 34

3.) Der hyperbolische Fall 37

Literaturverzeichnis 39

Lebenslauf

I. Kapitel: Die regulären Körper von Erhard Schmidt

Bevor ich auf die Definition des regulären Körpers komme, muß ich einleitend erst einige Begriffe und Schreibweisen einführen, die sich an die Arbeit von A. Dinghas [2] anschließen und auf die ich im dritten Kapitel zurückkommen muß. Wir bezeichnen als n - dimensionalen Riemannschen Raum konstanter Krümmung R^n die Menge aller Punkte des euklidischen Raumes E^{n+1}, deren Koordinaten durch die Gleichung

$$(1.1) \qquad x_1^2 + \ldots + x_n^2 + \frac{x_{n+1}^2}{K} = \frac{1}{K}$$

gegeben sind. Hierbei setzen wir im folgenden $K > 0$ voraus; für $K = 0$ erhält man den euklidischen Fall, der aber nicht mehr diskutiert werden muß. Auf den Fall $K < 0$ komme ich später zurück. Dieser Raum R^n mit $K > 0$ wird auch als elliptischer Raum bezeichnet, der mit $K < 0$ als hyperbolischer Raum.
Die Menge aller Punkte des E^{n+1}, die der Gleichung

$$(1.2) \qquad x_1^2 + \ldots + x_n^2 + x_{n+1}^2 = \frac{1}{K} \qquad (K > 0)$$

genügen, bezeichnen wir als sphärischen Raum S^n. Es ist bekannt, daß man aus dem sphärischen Raum den elliptischen Raum erhalten kann, wenn man die Punkte $P(x_1,\ldots,x_{n+1})$ und $P'(-x_1,\ldots,-x_{n+1})$ miteinander identifiziert.
Im folgenden ist zu bemerken, daß von jetzt an nur noch der elliptische und der sphärische Raum diskutiert wer-

den sollen. Der hyperbolische Raum wird getrennt behandelt.

Ich komme jetzt zu einer Darstellung des R^n in Polarkoordinaten, die A. Dinghas in seiner Arbeit [2] einführt und die es gestattet, die noch zu formulierende Schmidtsche Aufgabe übersichtlich darzustellen.

Setze

$$x_1 = x_1(\vartheta_1,\dots,\vartheta_n) = \frac{1}{\sqrt{K}} \sin\sqrt{K}\vartheta_1$$

$$(1.3) \qquad x_i = x_i(\vartheta_1,\dots,\vartheta_n) = \frac{1}{\sqrt{K}} \Big(\prod_{\nu=1}^{i-1} \cos\sqrt{K}\vartheta_\nu\Big) \sin\sqrt{K}\vartheta_i$$

$$(i = 2,\dots,n)$$

$$x_{n+1} = x_{n+1}(\vartheta_1,\dots,\vartheta_n) = \prod_{\nu=1}^{n} \cos\sqrt{K}\vartheta_\nu$$

Dann gilt $R^n = \left\{ (x_1,\dots,x_{n+1}) \,\middle|\, -\frac{\pi}{2\sqrt{K}} \le \vartheta_i < \frac{\pi}{2\sqrt{K}} \right\}$

Setzt man $x_1,\dots,x_n$ wie oben und $\sqrt{K}\, x_{n+1} = x'_{n+1}$, dann geht (1.2) in (1.1) über, und wir erhalten mit (1.3) für den sphärischen Raum S^n:

$$S^n = \left\{ (x_1,\dots,x_{n+1}) \,\middle|\, -\frac{\pi}{2\sqrt{K}} \le \vartheta_i < \frac{\pi}{2\sqrt{K}},\ (i = 1,2,\dots,n-1) \right.$$
$$\left. -\frac{\pi}{\sqrt{K}} \le \vartheta_n < \frac{\pi}{\sqrt{K}} \right\}$$

Hierbei handelt es sich natürlich eigentlich um die Darstellung der in den Punkten

$$x_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{K}}\,, \quad x_2 = \dots = x_n = x'_{n+1} = 0$$

punktierten Kugel (1.2). Das Bogenelement von (1.1)

$$(1.4)\quad ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2 + \frac{1}{K}\,dx_{n+1}^2$$

berechnet sich in den Koordinaten ϑ_i zu

$$(1.5)\quad ds^2 = d\vartheta_1^2 + \cos^2\sqrt{K}\vartheta_1 d\vartheta_2^2 + \ldots + \prod_{\nu=1}^{n-1}\cos^2\sqrt{K}\vartheta_\nu\, d\vartheta_n^2$$

und geht somit für $K \longrightarrow 0$ in die euklidische Fundamentalform

$$ds^2 = d\vartheta_1^2 + \ldots + d\vartheta_n^2$$

über.

Ich komme jetzt zur Definition des Fundamentalbereichs:

<u>Definition:</u> In einem Riemannschen Raum positiver konstanter Krümmung werden mit F_e, F_s folgende Teilmengen des euklidischen Raumes E^n bezeichnet:

$$F_e = \left\{ (\vartheta_1,\ldots,\vartheta_n) \;\middle|\; -\frac{\pi}{2\sqrt{K}} \leq \vartheta_i < \frac{\pi}{2\sqrt{K}} \;;\; i = 1,\ldots,n \right\}$$

$$F_s = \left\{ (\vartheta_1,\ldots,\vartheta_n) \;\middle|\; -\frac{\pi}{2\sqrt{K}} \leq \vartheta_i < \frac{\pi}{2\sqrt{K}} \;;\; i = 1,\ldots,n-1 \right.$$

$$\left. -\frac{\pi}{\sqrt{K}} \leq \vartheta_n < \frac{\pi}{\sqrt{K}} \right\}$$

F_e, F_s heißen dann Fundamentalbereiche des elliptischen bzw. des sphärischen Raumes.

Jetzt haben wir genügend Material gesammelt, um die regulären Körper von Erhard Schmidt einführen zu können.

1.) Definition des regulären Körpers in Riemannschen Räumen konstanter Krümmung

Definition: Eine Teilmenge G_k eines Fundamentalbereiches heißt k - dimensionales Grundgebilde, wenn eine topologische Abbildung τ eines k - dimensionalen Unterraumes $T^k \subset E^n$ mit

$$T^k = \left\{(t_1,\ldots,t_k) \;\middle|\; a'_\lambda \leq t_\lambda \leq a''_\lambda \;,\; a'_\lambda < a''_\lambda \;,\; \lambda = 1,\ldots,k\right\}$$

nach G_k existiert, definiert durch

$$(1.6) \qquad \vartheta_\nu = \vartheta_\nu(t_1,\ldots,t_k) \qquad \nu = 1,\ldots,n$$

Außerdem sollen die Funktionen $\vartheta_\nu(t_1,\ldots,t_k)$ zweimal stetig differenzierbar sein, und die Matrix $\left(\left(\frac{\partial \vartheta_\nu}{\partial t_\lambda}\right)\right)$ soll in jedem Punkt von T^k den Rang k haben.

Definition: $P \in G_k$ heißt innerer Punkt von G_k, wenn ein innerer Punkt $T \in T^k$ existiert mit $\tau(T) = P$.

Mit Hilfe des Grundgebildes können wir jetzt eine Klasse von Punktmengen M_k definieren, die nicht notwendig zusammenhängend zu sein brauchen. Danach kann der Begriff der k - dimensionalen Mannigfaltigkeit induktiv eingeführt werden.

1.) $M_k \subset F_e$ bzw. F_s und M_k ist kompakt.

2.) Zu jedem Punkt aus M_k existiert ein G_k mit der Eigenschaft, daß das Innere von G_k diesen Punkt und eine Umgebung dieses Punktes überdeckt. Existiert ein G_k mit der Eigenschaft, von M_k ganz überdeckt

zu werden ($G_k \subset M_k$), so heißt dieser Punkt innerer Punkt. (Sonst heißt er Randpunkt.)

3.) M_k besitzt innere Punkte.

4.) Jeder Randpunkt ist Häufungspunkt von inneren Punkten.

Nun führen wir nach Schmidt [8], [10] den Begriff der k - dimensionalen, regulären Mannigfaltigkeit induktiv ein:

Definition:

1.) Ein Punkt heißt 0 - dimensionale Mannigfaltigkeit.

2.) Eine zusammenhängende Punktmenge M_1, die den Bedingungen 1.) bis 4.) für k = 1 genügt, heißt eindimensionale Mannigfaltigkeit.

3.) Eine zusammenhängende Punktmenge M_k ($2 \leq k \leq n-1$), die den Bedingungen 1.) bis 4.) für k genügt, heißt k - dimensionale Mannigfaltigkeit, wenn gilt:
Falls M_k Randpunkte besitzt, so bildet die Menge dieser Punkte endlich viele (k-1) - dimensionale reguläre Mannigfaltigkeiten, von denen je zwei nur Punkte gemeinsam haben, die auf beiden Mannigfaltigkeiten Randpunkte sind.

Jetzt können wir zur Definition des regulären Körpers von Erhard Schmidt kommen:

Eine Teilmenge A des Riemannschen Raumes konstanter positiver Krümmung heißt regulärer Körper, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

a) A liegt im Fundamentalbereich und ist kompakt.

b) Innere Punkte und Randpunkte werden in bezug auf

den Fundamentalbereich definiert.

c) A besitzt innere Punkte.

d) Jeder Randpunkt ist Häufungspunkt von inneren Punkten.

e) Die inneren Punkte sind wegzusammenhängend.

f) Der Rand von A besteht aus endlich vielen regulären Mannigfaltigkeiten, von denen je zwei nur Punkte gemeinsam haben können, die dann aber selbst Randpunkte der Mannigfaltigkeiten sind.

Zweifellos ist die Differenzierbarkeitsvoraussetzung, die mit der Definition des k - dimensionalen Grundgebildes in die Definition des regulären Körpers eingeht, die wesentlichste Einschränkung. Es soll später einmal untersucht werden, ob diese Voraussetzung durch eine schwächere ersetzt werden kann. Allerdings liefert gerade diese Differenzierbarkeitsvoraussetzung ein wichtiges Resultat in der Schmidtschen Theorie, nämlich die Existenz eines orthogonalen Koordinatensystems $(0, \mathfrak{x}'_i)_{i=1,\ldots,n}$, das aus dem ursprünglichen System $(0, \mathfrak{x}_i)_{i=1,\ldots,n}$ durch eine infinitesimale Drehung hervorgeht. Außerdem hat dieses Koordinatensystem noch die Eigenschaft, daß zu jeder Koordinatenachse $0\,\mathfrak{x}'_\nu$ nur endlich viele Hyperebenen $\mathfrak{x}_\nu = \text{konst.}$ existieren, die den regulären Körper im euklidischen Sinne berühren. Auf diese Eigenschaft kommen wir im dritten Abschnitt noch einmal zurück. Zunächst soll erst die Schmidtsche Aufgabe formuliert werden.

2.) Formulierung der Schmidtschen Aufgabe

Erhard Schmidt hat in seiner Abhandlung "Über eine neue Methode zur Behandlung einer Klasse isoperimetrischer Aufgaben im Großen" (Math. Zeitschr. 47, 1942) [9] zwei isoperimetrische Probleme für Rotationskörper diskutiert, die folgendermaßen im n - dimensionalen euklidischen Raum zu formulieren sind:

1.) Unter allen Rotationskörpern A um die x_n - Achse, die außerhalb des durch

$$(1.7)\quad Z(\varrho) = \left\{ (x_1,\ldots,x_n) \;\middle|\; (x_1,\ldots,x_n) \in E^n; \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 = \varrho \right\}$$

definierten Zylinders verlaufen, soll derjenige bestimmt werden, der bei vorgegebener Oberfläche das Maximum des eingeschlossenen Volumens besitzt.

2.) Unter allen Rotationskörpern A um die x_n - Achse, deren Projektion den Raum

$$(1.8)\quad H(a,b) = \left\{ (x_1,\ldots,x_n) \;\middle|\; (x_1,\ldots,x_n) \in E^n \right.$$
$$\left. 0 < a^2 \leq \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 \leq b^2 \right\}$$

ausfüllt, soll derjenige bestimmt werden, der bei gegebener Oberfläche das Maximum des eingeschlossenen Volumens ergibt. Das zweite Problem wurde nun in der Arbeit von A. Dinghas [2] darin weiter verallgemeinert, daß hier nun nicht mehr nur Rotationskörper zugelassen

werden, sondern alle regulären Körper, deren Projektion im euklidischen Fall parallel zur x_n - Achse den Ring (1.8) ausfüllt. Außerdem wird noch vorausgesetzt, daß der Körper A durch die Punktmenge (1.8) in zwei Teile zerlegt wird.

Dieses jetzt im euklidischen Fall formulierte Problem wurde einheitlich für alle Riemannschen Räume konstanter Krümmung beliebiger Dimensionszahl formuliert und gelöst.

Sei A ein regulärer Körper im Riemannschen Raum der Krümmung $K > 0$. Die Koordinaten eines Punktes P von A werden durch $P(\vartheta_1,\dots,\vartheta_n)$ gemäß (1.3) mit der Metrik (1.5) gegeben. Weiter sei Z(a,b) der durch

$$(1.9)\quad Z(a,b) = \left\{ (\vartheta_1,\dots,\vartheta_n) \;\middle|\; \frac{\cos\sqrt{K}\,b}{K} \leq \frac{\prod_{\nu=1}^{n-1}\cos\sqrt{K}\,\vartheta_\nu}{K} \leq \frac{\cos\sqrt{K}\,a}{K} \right\}$$

definierte, ganz im Fundamentalbereich F_e bzw. F_s liegende Zylinder. Dann soll unter allen zulässigen Körpern derjenige bestimmt werden, der unter vorgegebener Oberfläche das Maximum an Volumen hat. Dabei ist ein zulässiger Körper A durch folgende Bedingungen gegeben:

1.) A ist regulärer Körper.

2.) Die Projektion von A längs ϑ_n ist Z(a,b).

3.) Auf dem Rand von Z(a,b) existiert eine Punktmenge Z_0, die die Oberfläche von A in zwei Teile zerlegt, so daß ein Überschreiten von einem Teil zum andern stets über Z_0 erfolgen muß.

Damit $Z(a,b)$ im Fundamentalbereich F_e bzw. F_s liegt, muß gelten:

$$b < \frac{\pi}{2\sqrt{K}}$$

Hiermit ist die Formulierung der Schmidtschen Aufgabe nach A. Dinghas erbracht. In der vorliegenden Arbeit wird dieses Problem nun ohne die Voraussetzung 3.) behandelt. Bevor wir uns der Lösung der Schmidtschen Aufgabe zuwenden, müssen noch Folgerungen aus der Schmidtschen Theorie und das Steinersche Symmetrisierungsverfahren diskutiert werden.

3.) Konstruktion eines Normalensystems

Wir bezeichnen mit Π ein n - dimensionales Parallelotop, dessen Kanten Parallel zu den Koordinatenachsen $0\,\vartheta_\nu'$ (siehe I, 1.)) verlaufen. Ferner sei die Oberfläche eines regulären Körpers A durch O(A) gegeben. Dann besteht O(A) nach Voraussetzung aus endlich vielen regulären Mannigfaltigkeiten $M_{n-1}^{(i)}$. Es gilt nun folgender

Satz 1: Es existiert eine positive Zahl η mit der Eigenschaft, daß für jedes n - dimensionale Parallelotop Π der Kantenlänge δ mit $\delta < \eta$, dessen Flächenseiten den Körper A im euklidischen Sinne nicht berühren, der Durchschnitt

$$M_{n-1}^{(i)} \frown \Pi$$

durch eine Gleichung der Form

$$\vartheta_{\nu_n}' = f_{\nu_n}(\vartheta_{\nu_1}', \ldots, \vartheta_{\nu_{n-1}}') \tag{1.10}$$

gegeben wird. Hierbei stellen die $\nu_1, \ldots, \nu_n$ eine Permutation der Zahlen 1,...,n dar, die von der Mannigfaltigkeit $M_{n-1}^{(i)}$ und von Π abhängt. Die Argumente $\vartheta_{\nu_1}', \ldots, \vartheta_{\nu_{n-1}}'$ durchlaufen dann die Projektion Π' von Π längs der ϑ_{ν_n}' - Achse.

Wir betrachten nun endlich viele zu den Koordinatenachsen $0\,\vartheta_\nu'$ senkrechte (n-1) - dimensionale Hyperebenen, die den ϑ_i' - Raum in berührungsfreie Parallelotope zer-

legen. Dabei sollen die Hyperebenen keine der regulären Randmannigfaltigkeiten berühren. Die Kantenlänge δ des entstehenden Würfelnetzes N_δ soll nun so klein sein, daß $\delta < \eta$ ist und daß jedes Parallelotop Π von N_δ mit $\Pi \cap A \neq \emptyset$ die Eigenschaft hat, ganz im entsprechenden Fundamentalbereich zu liegen. Diese Parallelotope sind von endlicher Anzahl.
Nun kann man jeden Teil der Randmannigfaltigkeiten $M_{n-1}^{(i)}$ durch eine Gleichung der Form (1.10) nach Satz 1 darstellen. Andererseits ergibt sich daraus im Zusammenhang mit der Schmidtschen Theorie (vgl. I, 1.)):

$$\vartheta_{\nu_n} = F_{\nu_n}(\vartheta_{\nu_1}', \ldots, \vartheta_{\nu_n}') \tag{1.11}$$

Nach A. Dinghas [2] gilt nun folgender

<u>Satz 2:</u> In jedem Punkt eines Parallelotops $\Pi < N_\delta$ mit $\Pi \cap A \neq \emptyset$ existiert mindestens eine (n-1) - reihige Unterdeterminante der Funktionalmatrix

$$\left(\left(\frac{\partial \vartheta_k}{\partial \vartheta_{\nu_\lambda}'}\right)\right) \qquad (\lambda = 1, \ldots, n-1),$$

die von Null verschieden ist.

So eine Determinante wird von jetzt an mit $D_{\nu_1, \ldots, \nu_{n-1}}$ bezeichnet.

Auf ein vollständiges Normalensystem regulärer Mannigfaltigkeiten kommt man nun durch folgende Überlegung:
Es sei M_k eine k - dimensionale reguläre Mannigfaltigkeit

Und $G_k \subset M_k$ ei nes ihrer Grundgebilde, das durch die Gleichung

$$\vartheta_i = \vartheta_i(t_1,\ldots,t_k) \qquad a'_\lambda \leq t_\lambda \leq a''_\lambda \qquad \lambda = 1,\ldots,k$$

die Umgebung eines Punktes P definiert. Die Matrix $\left(\left(\frac{\partial \vartheta_i}{\partial t_\lambda}\right)\right)$ hat nach Voraussetzung den Rang k. Somit hat das Gleichungssystem

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vartheta_i}{\partial t_\lambda} \xi_i = 0 \tag{1.12}$$

den Rang n-k. Die Normalenrichtungen werden dann durch die Lösungen von (1.12) angegeben. Überdeckt man die reguläre Mannigfaltigkeit M_k durch endlich viele Grundgebilde G_k, so wird in jedem Punkt von M_k eine Normalenschar definiert. Ein Vollständiges Normalsystem läßt sich nun rekursiv einführen:

Für $k = 1$ existiert in jedem Punkt eine wohlbestimmte Tangente und somit eine wohlbestimmte Normalenschar vom Range n-1, die die (n-1) - dimensionale Normalebene bildet. Diese Ebene ändert sich stetig mit dem Bezugspunkt.

In jedem Randpunkt von M_1, den wir als 0 - dimensionale Mannigfaltigkeit auffassen, existiert in bezug auf diese Randmannigfaltigkeit eine Normalenschar vom Rang n, die aus allen Geraden durch diesen Punkt besteht.

In einer k - dimensionalen Mannigfaltigkeit M_k existiert nun eine wohlbestimmte Normalenschar vom Range n-k. Diesem System wird noch das vollständige Normalsystem der endlich vielen (k-1) - dimensionalen Randmannigfaltigkeiten von M_k hinzugefügt. Dann erhält man das vollständige

Normalsystem von M_k.

Hiermit ergibt es sich nun, ein vollständiges Normalsystem für einen regulären Körper A im n - dimensionalen Riemannschen Raum konstanter Krümmung durch die Gesamtheit der vollständigen Normalsysteme seiner endlich vielen regulären (n-1) - dimensionalen Randmannigfaltigkeiten zu definieren.

Zum Schluß dieses Abschnitts soll noch die Normalrichtung der äußeren Normalen eines regulären Körpers A angegeben werden:
Für jede Randmannigfaltigkeit $M_{n-1}^{(i)}$ definieren wir im Einklang mit dem euklidischen Fall die Richtungskosinus $\cos(n,\vartheta_i)$ durch

$$(1.13) \qquad \cos(n,\vartheta_{\nu_n}) = \frac{g_{\nu_1}\cdots g_{\nu_{n-1}} D_{\nu_1,\cdots\nu_{n-1}}}{\sqrt{\sum_{(\nu_1\cdots\nu_{n-1})} (g_{\nu_1}\cdots g_{\nu_{n-1}})^2 D^2_{\nu_1,\cdots\nu_{n-1}}}}$$

Hierbei sind die $\nu_1,\ldots,\nu_{n-1}$ wieder zyklische Permutationen von $1,\ldots,n-1$ und

$$(1.14) \qquad g_i = \Big(\prod_{\nu=1}^{i-1} \cos^2 \sqrt{K}\,\vartheta_\nu \Big) d\vartheta_i^2 \qquad i = 2,\ldots,n$$

$$g_1 = 1$$

Zunächst stellt (1.13) natürlich nicht unbedingt die Richtungen der äußeren Normalen von A dar. Man kann das aber durch Umbennenung der $\vartheta'_1,\ldots,\vartheta'_{n-1}$ in einem Punkt

erreichen. Nachdem dies geschehen ist, gilt diese Tatsache in jedem entsprechenden Parallelotop Π, wenn man dessen Kantenlänge nur so klein wählt, daß mindestens eine Determinante $D_{\nu_1 \cdots \nu_{n-1}}$ in dem abgeschlossenen Parallelotop nicht verschwindet, was nach Satz 2 möglich ist. Diese Umbenennung wird nun stets als vollzogen angesehen, so daß (1.13) die Richtungen der äußeren Normalen von A angibt.

II. Kapitel: Die Steinersche Symmetrisierung

1.) Abbildung regulärer Körper in einen euklidischen Modellraum

Wir betrachten zunächst den sphärischen Raum S^n der Krümmung $K = 1$:

$$(2.1) \quad S^n = \left\{ (x_1,\ldots,x_{n+1}) \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \right\}$$

d.h. die Oberfläche der Einheitskugel des (n+1) - dimensionalen Raumes.

Betrachtet man nun den in den Punktmengen

$$M_1 = \left\{ (x_1,\ldots,x_{n+1}) \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 = 1 \;,\; (x_1,\ldots,x_{n+1}) \in S^n \right\}$$

$$M_2 = \left\{ (x_1,\ldots,x_{n+1}) \;\middle|\; x_n = x_{n+1} = 0 \;,\; (x_1,\ldots,x_{n+1}) \in S^n \right\}$$

punktierten Raum $\underline{S}^n = S^n \setminus (M_1 \cup M_2)$, so wird auf $\underline{S}^n$ folgende eindeutige Abbildungsvorschrift auf die Oberfläche des Zylinders definiert, dessen Leitlinie durch die Bedingung

$$(2.2) \quad x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = 0 \text{ und } x_n^2 + x_{n+1}^2 = 1$$

gegeben ist:

Sei $P(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}) \in \underline{S}^n$, so bilde man die Verbindungsgerade g zwischen $P(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1})$ und $P(x_1,\ldots,x_{n-1},0,0)$.

Dann schneide man g mit der Oberfläche des Zylinders (2.2). Man erhält dann zwei Schnittpunkte P_1 und P_2, von denen ei ner eine kürzere euklidische Entfernung von P besitzt als der andere. Den Punkt mit der kürzeren euklidischen Entfernung bezeichnen wir mit P*. Die Zuordnung $P \longrightarrow P^*$ ist dann auf S^n injektiv. Ordnet man nun x_n^* , x_{n+1}^* den Winkel y_n zu, den der obige Verbindungsstrahl mit der zur x_{n+1} - Achse parallelen Richtung einschließt, und drückt die Koordinaten von P* in Zylinderkoordinaten aus, so erhält man wegen

$$\frac{x_n^*}{1} = \sin y_n = \frac{x_n}{\sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2}} \tag{2.3}$$

$$\frac{x_{n+1}^*}{1} = \cos y_n = \frac{x_{n+1}}{\sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2}}$$

die Zylinderkoordinaten $(y_1,\ldots,y_n)$ von P* durch folgende Transformationsformel:

$$\begin{aligned} x_i &= y_i \qquad\qquad i = 1,\ldots,n-1 \\ x_n &= \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2}\ \sin y_n \\ x_{n+1} &= \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2}\ \cos y_n \end{aligned} \tag{2.4}$$

Hierbei gilt nun

$$(2.5) \qquad \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 < 1 \qquad \text{und} \qquad -\pi \leq y_n < \pi$$

Diese Punktmenge nennen wir mit Dinghas Fundamentalbereich G_0 der Abbildung.
Aus dieser Abbildungsvorschrift lassen sich sofort zwei geometrische Eigenschaften herleiten, wenn man nun die Koordinaten $(y_1,\ldots,y_n)$ als Koordinaten eines Punktes des n - dimensionalen euklidischen Raumes betrachtet.

Satz 3:

a) Jedem Großkreis auf S^n , der die x_n, x_{n+1} Ebene senkrecht schneidet, wird in eineindeutiger Weise eine Hyperebene des Fundamentalbereiches y_n = const. zugeordnet.

b) Jedem zur x_n, x_{n+1} Ebene auf S^n verlaufenden Parallelkreis wird eine Gerade des n - dimensionalen euklidischen Raumes zugeordnet.

Beweis: zu a): Die Behauptung ergibt sich aus der geometrischen Bedeutung der Zuordnung.
zu b): Ein zur x_n, x_{n+1} Ebene parallel verlaufender Kreis auf S^n hat die Darstellung

$$x_n^2 + x_{n+1}^2 = \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n-1} t_i^2} \quad ; \; x_1 = t_1,\ldots,x_{n-1} = t_{n-1} \; ;$$

dem entspricht dann die Gerade

$y_i = t_i \quad i = 1,\ldots,n-1$, die

parallel zur y_n - Achse verläuft.

Für die folgenden Betrachtungen wird es wichtig sein, die Abbildungsvorschrift zu erweitern, so daß sie sich nicht nur auf den punktierten Raum $\underline{S}^n$, sondern auf den gesamten Raum S^n bezieht. Weiterhin soll dann diese Abbildungsvorschrift auf jeden Riemannschen Raum konstanter positiver Krümmung verallgemeinert werden, wobei man dann auch die vorige geometrische Interpretation modifizieren kann.

Sei also zunächst $P(x_1,\ldots,x_{n+1})$ ein Punkt von $M_1 \cup M_2$. Aus $P(x_1,\ldots,x_{n+1}) \in M_1$ folgt

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad x_n = x_{n+1} = 0$$

Hieraus folgt $P(x_1,\ldots,x_{n+1}) \in M_2$. Andererseits folgt auch unmittelbar die umgekehrte Inklusion. Es gilt also $M_1 = M_2$. Somit ordne man nun einem Punkte aus $M_1 \cup M_2$ mit den Koordinaten $(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1})$ die durch

$$(2.6) \qquad y_i = x_i \quad i = 1,\ldots,n-1 \qquad -\pi \leq y_n < \pi$$

definierte zur y_n - Achse parallele Gerade des Randes von G_0 zu. Natürlich ist die so erweiterte Transformation (2.4) nicht mehr eineindeutig.

Zum Schluß dieses Abschnitts soll die erweiterte Transformation noch auf Riemannsche Räume konstanter positiver

Krümmung erweitert werden:

Durch die bijektive, affine Transformation

$$\xi_i = \frac{1}{\sqrt{K}}\, x_i \qquad i = 1,\dots,n$$

(2.7)

$$\xi_{n+1} = x_{n+1}$$

geht die Einheitskugel S^n über in

$$(2.8)\quad (\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2) + \frac{\xi_{n+1}^2}{K} = \frac{1}{K}$$

Die Abbildung der Punkte aus (2.8) in den eben konstruierten Modellraum werden wir nun in naheliegender Weise folgendermaßen definieren:

Ist $P(\xi_1,\dots,\xi_n)$ ein Punkt, dessen Koordinaten (2.8) erfüllen, so ordnen wir ihm das Urbild aus S^n unter (2.7) zu und bilden dieses Urbild nun unter der bekannten Transformation auf G_0 ab. Wir erhalten dann:

$$\xi_i = \frac{1}{\sqrt{K}}\, x_i = \frac{1}{\sqrt{K}}\, y_i \qquad i = 1,\dots,n-1$$

$$\xi_n = \frac{1}{\sqrt{K}}\, x_n = \frac{1}{\sqrt{K}} \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2}\, \sin y_n$$

$$\xi_{n+1} = x_{n+1} = \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2}\, \cos y_n$$

Mit $y_i = \sqrt{K}\,\eta_i$ $(i = 1,\dots,n)$ ergibt sich dann die

verallgemeinerte Transformation

$$
\begin{aligned}
\xi_i &= \eta_i \qquad\qquad i = 1,\dots,n-1 \\
\xi_n &= \frac{\sqrt{1 - K\sum_{i=1}^{n-1}\eta_i^2}}{\sqrt{K}} \sin\sqrt{K}\eta_n \\
\xi_{n+1} &= \sqrt{1 - K\sum_{i=1}^{n-1}\eta_i^2}\cos\sqrt{K}\eta_n
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

Der Fundamentalbereich für den sphärischen Fall ist gegeben durch die Punktmenge

$$
K(\eta_1^2 + \dots + \eta_{n-1}^2) < 1 \text{ und } -\frac{\pi}{\sqrt{K}} \leq \eta_n < \frac{\pi}{\sqrt{K}} \tag{2.10}
$$

und für den elliptischen Fall wegen der Bemerkung nach (1.2) durch

$$
K(\eta_1^2 + \dots + \eta_{n-1}^2) < 1 \text{ und } -\frac{\pi}{2\sqrt{K}} \leq \eta_n < \frac{\pi}{2\sqrt{K}} \tag{2.11}
$$

Fassen wir nun die Koordi naten $y_1,\dots,y_n$ bzw. $\eta_1,\dots,\eta_n$ als Koordinaten eines Punktes im euklidischen Raum E^n auf, so wurde in diesem Abschnitt eine spezielle Transformation diskutiert, die, auf reguläre Körper angewandt, diese in einen sogenannten euklidischen Modellraum abbildet.
Im nächsten Abschnitt sollen nun Eigenschaften dieser Abbildung diskutiert werden, die zu einer weiteren Verallgemeinerung führen.

2.) Eigenschaften dieser Abbildung

Eine wichtige Eigenschaft der obigen Transformation wurde bisher noch nicht beachtet. Wir bezeichnen mit K_0 den Schnitthalbkreis von S^n mit der Halbebene $x_n = 0$, $x_{n+1} \leq 0$. Dann gilt folgender Hilfssatz:
Die verallgemeinerte Transformation (2.4) ist in jedem Punkt von $K_0 \setminus (M_1 \cup M_2)$ unstetig.

Beweis: Sei $P(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1})$ ein Punkt von $K_0 \setminus (M_1 \cup M_1)$. Wir lassen nun auf dem Parallelkreis

$$\xi_n^2 + \xi_{n+1}^2 = \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2}$$

den Punkt $(x_1,\ldots,x_{n-1},\xi_n,\xi_{n+1})$ gegen $(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1})$ streben und zwar einmal auf

$$\xi_n > 0 \ , \quad \xi_{n+1} < 0$$

und einmal auf

$$\xi_n < 0 \ , \quad \xi_{n+1} < 0.$$

Dann erhalten wir für die Koordinaten $(y_1,\ldots,y_n)$ des Bildpunktes von P ei nmal

$$y_n = \pi \quad \text{und einmal} \quad y_n = -\pi$$

Eine einfache, aber wesentliche Folgerung aus diesem Hilfssatz besteht nun darin, daß jede einfach zusammenhängende Menge $A \subset S^n$, die mit dem Schnitthalbkreis K_0 innere Punkte gemeinsam hat, im "y - Raum" auseinander-

gerissen, zweifach zusammenhängend wird. Darum führen wir in E^n folgende Äquivalenzrelation ($\sim$) ein:

Zwei Punkte $(y_1^{(1)},\ldots,y_n^{(1)})$, $(y_1^{(2)},\ldots,y_n^{(2)}) \in E^n$ sollen äquivalent heißen, falls eine ganze Zahl m existiert mit der Eigenschaft

$$(2.12)\quad y_n^{(1)} = y_n^{(2)} + 2m\pi \text{ und } y_i^{(1)} = y_i^{(2)} \quad (i = 1,\ldots,n-1)$$

Bei Riemannschen Räumen konstanter positiver Krümmung K werden analog äquivalente Punkte durch

$$(2.13)\quad y_n^{(1)} = y_n^{(2)} + m\frac{\pi}{\sqrt{K}};\ y_i^{(1)} = (-1)^m y_i^{(2)} \quad (i = 1,\ldots,n-1$$

für den elliptischen Fall

und durch

$$(2.14)\quad y_n^{(1)} = y_n^{(2)} + m\frac{2\pi}{\sqrt{K}};\ y_i^{(1)} = y_i^{(2)} \quad (i = 1,\ldots,n-1)$$

für den sphärischen Fall

gegeben.

Bezeichnen wir die verallgemeinerte Transformation (2.4) mit f und die natürliche Abbildung von E^n nach $E^n/\sim$ mit ν, so wollen wir nun die Eigenschaften der Transformation $D = \nu \circ f$ studieren, die von A. Dinghas [4] aufgestellt wurde, um die Steinersche Symmetrisierung auf Riemannsche Räume konstanter Krümmung zu übertragen. Mit $D_0(A)$ wollen wir das Bild von A bezeichnen, für das f(A) im Fundamentalbereich G_0

liegt und in dem wir äquivalente Punkte bereits identifiziert haben. Es ergibt sich dann folgender

Satz 4: $A \subset R^n$ sei ein einfach zusammenhängender, kompakter, Körper; das nichteuklidische Volumen von A sei V(A). Das euklidische Volumen von $D_0(A)$ sei $|D_0(A)|$.
Dann gilt:

a) $D_0(A)$ ist einfach zusammenhängend.

b) $|D_0(A)| = V(A)$

Beweis: Teil a) ergibt sich aus der Definition der Abbildung D_0, die ja gerade so konstruiert wurde, daß der Zusammenhang nicht auseinandergerissen wird.
Teil b): Falls A keine Ausnahmepunkte aus $M_1 \cup M_2$ enthält, gilt nach Dinghas [4] $V(A) = |f(A)|$. Andererseits gilt $|\nu \circ f(A)| = |f(A)|$. Hieraus folgt speziell $|D_0(A)| = V(A)$.
Sei A' die Menge der Ausnahmepunkte von A. Dann gilt zunächst $|D_0(A \setminus A')| = V(A \setminus A')$
Da die Ausnahmepunkte wegen der Dimension n-2 und das Bild der Ausnahmepunkte wegen der Dimension n-1 das n - dimensionale L - Maß Null haben, gilt wegen $(A \setminus A') \cap A' = \emptyset$

$$|D_0(A)| = |D_0(A \setminus A' \cup A')| = |D_0(A \setminus A')| + |D_0(A')| = |D_0(A \setminus A')|$$

$$= V(A \setminus A') = V(A \setminus A') + V(A') = V(A \setminus A' \cup A') = V(A)$$

Nun haben wir in diesem Kapitel alle Voraussetzungen erarbeitet, um einmal die Schmidtsche Aufgabe durch die noch zu formulierende Steinersche Symmetrisierung in Riemannschen Räumen konstanter positiver Krümmung lösen zu können.

3.) Symmetrisierung

In diesem Abschnitt des zweiten Kapitels soll die Steinersche Symmetrisierung nach A. Dinghas [4] auf Riemannsche Räume konstanter, positiver Krümmung übertragen werden. Nach den langen Vorbereitungen in den ersten beiden Abschnitten und wegen der Aussage des Satzes 4 liegt die Vermutung nahe, daß eine Symmetrisierung im R^n mit der im n - dimensionalen euklidischen Raum E^n verglichen werden soll. Darum soll die Steinersche Symmetrisierungsvorschrift im n - dimensionalen euklidischen Raum zunächst definiert werden:
Es sei also A ein beliebiger, kompakter Körper von E^n. Weiterhin soll $E \subset E^n$ eine (n-1) - dimensionale Hyperebene sein und $\varphi(y_1,\ldots,y_n)$ die charakteristische Funktion von A. Alle senkrecht auf E stehenden Geraden, die mit A gemeinsame Punkte haben, werden mit g bezeichnet. Ist der Richtungseinheitsvektor von g, der mit der Normalenrichtung von E übereinstimmen soll, durch ν und der Schnittpunkt von g mit E durch y_0 bestimmt, so gilt

$$(2.15)\quad g = \Big\{ (y_1(t),\ldots,y_n(t)) \;\Big|\; (y_1(t),\ldots,y_n(t)) \in E^n \text{ und } (y_1(t),\ldots,y_n(t)) \equiv y_0 + t\nu \Big\}$$

Ist der Durchschnitt d von g mit E vom Lebesguesschen Maße Null, so ordnen wir jedem Punkte von d den Schnittpunkt y_0 zu. Ist der Durchschnitt von d von g mit E von positivem Lebesguesschen Maße, so wird jedem Punkt

P(t) ein Punkt $\overline{P}(\overline{t})$ von g zugeordnet mit

$$t = l(t) - \frac{1}{2}\, l(\infty) \tag{2.16}$$

und

$$l(t) = \int_{\tau \leq t} \varphi(y_1(\tau),\ldots,y_n(\tau))\, d\tau \tag{2.17}$$

Hierbei durchläuft das n - Tupel $(y_1(\tau),\ldots,y_n(\tau))$ alle Punkte von g mit $\tau \leq t$. Wenden wir nun dieses Verfahren auf alle Geraden g mit nichtleerem Durchschnitt an, so bildet die Menge aller Punkte $\overline{P}(\overline{t})$ einen bezüglich der Hyperebene E zu A symmetrischen Körper $\overline{A}$.

Nun soll die Steinersche Symmetrisierung im R^n definiert werden, wobei hier stets Symmetrisierung bezüglich der Hyperebenen

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i = 0 \tag{2.18}$$

des E^{n+1} betrachtet werden. O.b.d.A. genügt es, den Symmetrisierungsprozeß bezüglich der Hyperebene

$$x_n = 0 \tag{2.19}$$

zu definieren, da man jede Hyperebene der Form (2.18) durch eine Bewegung des R^n

$$(2.20) \qquad x_i' = \sum_{k=1}^{n+1} a_{ik} x_k \qquad i = 1,\ldots,n+1$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i'^2 = 1$$

auf die Form (2.19) bringen kann. Die Ausnahmepunkte eines beliebigen kompakten Körpers aus $A \cap (M_1 \cup M_2) = A'$ sollen bei der Steinerschen Symmetrisierung bezüglich der Hyperebene (2.19) in sich selbst überführt werden. Sie liegen ja auf dem Symmetrisierungsgroßkreis. Die Menge $A \setminus A'$ wird nun folgendermaßen symmetrisiert:
Man symmetrisiere $D_0(A \setminus A')$ bezüglich $y_n = 0$ und stelle sich $\overline{D_0(A \setminus A')}$ in jedem Nebenbereich des universellen Überlagerungsbereiches periodisch wiederholt vor. Somit erhält man $\overline{D(A \setminus A')}$. Die Transformation D ermöglicht es nun, der Menge $\overline{D(A \setminus A')}$ in eindeutiger Weise einen Körper $\overline{(A \setminus A')}$ des R^n zuzuordnen. Zusammen mit den Ausnahmepunkten bildet dieser Körper einen Körper $\overline{A} \subset R^n$, der der bezüglich der Hyperebene $x_n = 0$ symmetrisierte Körper heißen soll. Ist A ein regulärer Körper, so ist auch $\overline{A}$ ein regulärer Körper.

4.) Eigenschaften der Symmetrisierung

Wurde im vorigen Abschnitt der Symmetrisierungsprozeß definiert, so wollen wir hier die beiden fundamentalen Eigenschaften der Steinerschen Symmetrisierung erwähnen, die im dritten Kapitel bei der Herleitung der fundamentalen isoperimetrischen Ungleichung von Wichtigkeit sind. Auf einen ausführlichen Beweis soll hier verzichtet werden. Man kann ihn bei A. Dinghas [4] nachlesen.

Eigenschaft 1: Sei $A \subset R^n$ ein regulärer Körper. $\bar{A}$ sei der bezüglich $x_n = 0$ symmetrisierte Körper. Dann gilt

$$V(A) = V(\bar{A})$$

Der Beweis der Eigenschaft 1 beruht darauf, daß man den Satz 4 anwendet und ausnutzt, daß im euklidischen Raum jede kompakte Punktmenge mit der bezüglich einer Hyperebene zugehörigen symmetrisierten Punktmenge gleiches Volumen hat.

Eigenschaft 2: Für jeden regulären Körper $A \subset R^n$ gilt für den zugehörigen, bezüglich $x_n = 0$ symmetrisierten Körper $\bar{A}$:

$$O(\bar{A}) \leq O(A) \quad ,$$

wobei $O(\bar{A})$, $O(A)$ die Oberflächen der Körper $\bar{A}$ bzw. A sind.

Der Beweis dieser Ungleichung läuft darauf hinaus, daß man den Raum R^n in eindimensionale Parallelkreise zer-

legt. (Es genügt wegen (2.7), die Ungleichung nur für den Fall K = 1 zu beweisen!) Diese Kreise sollen parallel zur x_n, x_{n+1} Ebene verlaufen. Aus Satz 3 Teil b) folgt, daß diese Kreise als parallele Geraden im Modellraum erscheinen. Nun braucht im Modellraum nur die analoge Ungleichung bewiesen zu werden: Hierzu läßt sich das Problem durch zweimaliges Ersetzen äquivalenter Ungleichungen auf ein eindimensionales Problem reduzieren. Die Abschätzungen verlaufen dann nur noch auf den Bildgeraden der Parallelkreise. Weiterhin geht dann noch ein Resultat von Macbeath [7] über die Maße von Summenmengen ein.

Aus dieser kurzen Beweisskizze ist wahrscheinlich schon ersichtlich, daß der eigentliche Beweis recht lang ist. Deshalb möge man mir verzeihen, daß ich dieses Ergebnis hier nur übernehme.

III. Kapitel: Die Lösung der Schmidtschen Aufgabe

In diesem Kapitel werden nun die mehr oder weniger vorbereitenden Tatsachen der ersten beiden Kapitel zur Lösung der Schmidtschen Aufgabe herangezogen. Hierbei wird nun folgender Gedankengang verfolgt: Ein beliebiger regulärer Körper A, dessen Projektion $P_{\mathcal{L}_n}(A)$ längs $\mathcal{L}_n$ ein definierter Zylinder Z(a,b) ist, wird nach Steiner bezüglich $\mathcal{L}_n = 0$ symmetrisiert. Der symmetrisierte Körper $\overline{A}$ erfüllt dann zusätzlich die Voraussetzung der Trennbarkeit, und man kann somit zur Lösung der Schmidtschen Aufgabe die Ergebnisse von A. Dinghas heranziehen. Das Symmetrisierungsverfahren wurde absichtlich nur einmal auf den Körper A angewandt. Man hätte noch bezüglich aller Ebenen, die als gemeinsamen Durchschnitt die $\mathcal{L}_n$ - Achse ergeben, symmetrisieren können und wäre dadurch sofort auf Rotationsmannigfaltigkeiten gekommen. Dann wären aber einige Gedanken über die Regularität des Grenzkörpers nötig gewesen, die das gesamte Beweisverfahren erheblich verlängert hätten.

1.) Herleitung einer isoperimetrischen Gleichung

Es sei nun A ein beliebiger regulärer Körper mit $P_{\mathcal{L}_n}(A) = Z(a,b)$. Es gilt

Hilfssatz 1: $$\prod_{i=1}^{n-1} \cos\sqrt{K}\,\mathcal{L}_i = \sqrt{1 - K\sum_{i=1}^{n-1} y_i^2}$$

mit den Bezeichnungen des ersten und zweiten Kapitels.

Beweis: Es gilt $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \frac{x_{n+1}^2}{K} = \frac{1}{K}$ oder

$$K x_n^2 + x_{n+1}^2 = 1 - K \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 = 1 - K \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 \Longrightarrow$$

$$\prod_{i=1}^{n-1} \cos^2 \sqrt{K}\vartheta_i \sin^2 \sqrt{K}\vartheta_n + \prod_{i=1}^{n} \cos^2 \sqrt{K}\vartheta_i = 1 - K \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 \Longrightarrow$$

$$\prod_{i=1}^{n-1} \cos^2 \sqrt{K}\vartheta_i \, (\sin^2 \sqrt{K}\vartheta_n + \cos^2 \sqrt{K}\vartheta_n) = 1 - K \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2$$

Hieraus ergibt sich die Behauptung.

Aus Hilfssatz 1 folgert man aber sofort durch einen Vergleich entsprechender Formeln, daß

(3.1) $\vartheta_n = y_n + m \frac{2\pi}{\sqrt{K}}$ (sphärischer Fall)

und

(elliptischer Fall)

gilt.

Mit den Bemerkungen des zweiten Kapitels ergibt das: Eine Symmetrisierung bezüglich $\vartheta_n = 0$ stellt in der Bezeichnungsweise des zweiten Kapitels eine Symmetrisierung bezüglich $y_n = 0$ dar. Diese wurde aber bereits mit ihren Eigenschaften diskutiert. Wir erhalten also einen bezüglich $\vartheta_n = 0$ symmetrischen Körper $\overline{A}$ im oben gemeinten Sinne.

Wir beweisen

Hilfssatz 2: $P_{\vartheta_n}(A) = P_{\overline{\vartheta}_n}(\overline{A})$

Beweis: $Q(\vartheta_1,\ldots,\vartheta_{n-1}) \in P_{\vartheta_n}(A) \Rightarrow Q(\vartheta_1,\ldots,\vartheta_{n-1},\vartheta_n) \in A$

$\Rightarrow \overline{Q}(\overline{\vartheta}_1,\ldots,\overline{\vartheta}_{n-1},\overline{\vartheta}_n) = Q(\vartheta_1,\ldots,\vartheta_{n-1},\overline{\vartheta}_n) \in \overline{A}$

$\Rightarrow Q(\vartheta_1,\ldots,\vartheta_{n-1}) \in P_{\overline{\vartheta}_n}(\overline{A})$

Die umgekehrte Richtung ergibt sich analog. Da $Q(\vartheta_1,\ldots,\vartheta_{n-1})$ beliebig war, ist die Behauptung richtig.

Aus Hilfssatz 2 folgt wegen $P_{\vartheta_n}(A) = Z(a,b)$ unmittelbar $P_{\overline{\vartheta}_n}(\overline{A}) = Z(a,b)$.

Setze nun

$$\overline{A}_1 = \left\{P(\vartheta_1,\ldots,\vartheta_{n-1},\vartheta_n) \;\middle|\; P(\vartheta_1,\ldots,\vartheta_n) \in \overline{A} \text{ und } \vartheta_n \geq 0\right\}$$

$$\overline{A}_2 = \left\{P(\vartheta_1,\ldots,\vartheta_{n-1},\vartheta_n) \;\middle|\; P(\vartheta_1,\ldots,\vartheta_n) \in \overline{A} \text{ und } \vartheta_n \leq 0\right\}$$

Dann gilt $\overline{A}_1 \frown \overline{A}_2 = Z(a,b)$, und wir können folgende Zuordnungsvorschrift definieren: Es sei A_g der zu $\overline{A}$ nach A. Dinghas existierende Grenzkörper mit der Oberfläche O_g und dem Volumen V_g. $\overline{O}_1$ und $\overline{O}_2$ seien die Oberflächen von $\overline{A}_1$ bzw. $\overline{A}_2$. Es sei $P_1(\vartheta_1,\ldots,\vartheta_n) \in \overline{O}_1$. Die durch P gehende ϑ_n Parameterlinie schneidet A_g in der oberen Hälfte O_{g_1}. Diesen Schnittpunkt ordnen wir dem Punkt $\overline{P}_1(\vartheta_1,\ldots,\vartheta_{n-1},\vartheta'_n)$ zu. Analog ordnen wir einem Punkt $P_2(\vartheta_1,\ldots,\vartheta_n)$ der unteren Hälfte $\overline{O}_2$ einen Punkt $\overline{P}_2(\vartheta_1,\ldots,\vartheta_{n-1},\vartheta''_n)$ der unteren Hälfte O_{g_2} des Grenzkörper zu.

Nach A. Dinghas werden die ϑ_n - Koordinaten durch

Gleichungen der Form

$$(3.2)\quad \vartheta_n' + F_g(\vartheta_1,\ldots,\vartheta_{n-1}) = 0 \text{ und}$$
$$\vartheta_n'' - F_g(\vartheta_1,\ldots,\vartheta_{n-1}) = 0$$

gegeben, was der Symmetrie bezüglich $\vartheta_n = 0$ entspricht. Es sei hier bemerkt, daß die eben erklärte Zuordnung nicht eindeutig zu sein braucht. Aber wegen der Symmetrie bezüglich $\vartheta_n = 0$ entspricht jedem Punkt P_1 (bzw. P_2) ein bestimmter Punkt $\overline{P_1}$ (bzw. $\overline{P_2}$).
Aus (3.2) konstruieren wir uns nun mit

$$(3.3)\quad \vartheta_n' + F_g(\vartheta_1,\ldots,\vartheta_{n-1}) = c$$

eine Flächenschar, wobei die Konstante c so gewählt wurde, daß die entsprechende Fläche durch P_1 geht.
Es sei nun n die äußere Normale in P_1 und $\overline{n}$ die äußere Normale in $\overline{P_1}$. Geht nun (3.3) durch P_1, so bilden n und $\overline{n}$ einen Winkel, den wir mit $(n,\overline{n})$ bezeichnen. Entsprechend definiert man dann auch $(n,\overline{n})$ im Punkt P_2.
Die fundamentale isoperimetrische Ungleichung erhält man nun, wenn man vom Integral

$$(3.4)\qquad \int \cos(n,\overline{n})\, d0$$

ausgeht. Auf eine vollständige Herleitung soll in dieser Arbeit verzichtet werden. Man kann das bei A. Dinghas [2] nachlesen. Es ist aber dennoch wichtig, den Gedankengang kurz zu skizzieren:

Zunächst werden unter Zugrundelegung einer gewissen Differentialgleichung drei Klassen von Extremalkörpern konstruiert. Diese Körper werden durch Rotation einer Meridiankurve um die ϑ_n - Parameterlinie erzeugt. Für solche Körper ergeben sich für die zugehörige Oberfläche und das entsprechende Volumen geschlossene Ausdrücke. Durch Anwendung des Gaußschen Divergenzsatzes erhält A. Dinghas für $\overline{A}$ die Gleichung

$$(3.5)\quad (n-1)(V(\overline{A}) - V(A_g)) = \varrho_g(O(\overline{A}) - O(A_g)) - 2\varrho_g R(\overline{A},A_g)$$

mit $R(\overline{A},A_g) = \int \sin^2 \frac{(n,\overline{n})}{2}\, dO$ und $\varrho_g > 0$

Die Existenz von A_g wird bei A. Dinghas durch ein Konstruktionsverfahren gesichert. Seine Extremaleigenschaft ist in (3.5) unmittelbar abzulesen, wenn man weiß, daß zu jedem $O(A)$ genau ein Grenzkörper A_g existiert mit $O(A) = O(A_g)$.

2.) Folgerungen aus dieser Gleichung

Wir müssen nun noch zeigen, daß für unseren anfangs betrachteten Körper A

$$(3.6) \qquad V(A) \leq V(A_g)$$

gilt, und das Gleichheitszeichen genau dann auftritt, wenn A und A_g kongruent sind. Es gilt der folgende

Satz 5: Unter allen in Z(a,b) einbeschriebenen regulären Körpern A, die in F_e bzw. F_s liegen, erreichen bei vorgegebener Oberfläche O(A) mit

$$(3.7) \qquad O(A) > 2(n-1)\, W_{n-1} \int_a^b \left[\frac{\sin\sqrt{K}\,u}{\sqrt{K}}\right]^{n-2} du \,.$$

nur die im Sinne von A. Dinghas konstruierten Grenzkörper A_g das Maximum an Volumen. W_{n-1} ist hierbei das Volumen der (n-1) - dimensionalen Einheitskugel.

Beweis: Es sei O(A) vorgegeben. Den zugehörigen Körper A symmetrisiere man bezüglich $\mathcal{L}_n = 0$. Man erhält dann einen Körper $\overline{A}$ mit der Oberfläche $O(\overline{A}) \leq O(A)$ und dem Volumen $V(A) = V(\overline{A})$.
Nach A. Dinghas [2] existiert zu jeder vorgegebenen Oberfläche O(A), die (3.7) erfüllt, genau ein Körper A_g mit $O(A) = O(A_g)$. Hierbei geht nicht die Trennbarkeit des

betrachteten Körpers ein, so daß die Aussage für jeden regulären Körper gültig ist. Es sei aber bemerkt, daß $O(A)$ auch nach oben beschränkt sein muß, da der Körper A im Fundamentalbereich liegen muß.

Für A gilt nun (3.5) oder dazu äquivalent

$$(n-1)(V(A) - V(A_g)) = \varsigma_g(O(A) - O(A_g)) - \varsigma_g(O(A) - O(\bar{A})) - 2\varsigma_g R(\bar{A},A_g)$$

Wegen $O(\bar{A}) \leq O(A)$ und $O(A) = O(A_g)$ folgt

$$(n-1)(V(A) - V(A_g)) \leq - 2\varsigma_g R(\bar{A},A_g)$$

Hieraus folgt

$$V(A) \leq V(A_g)$$

Gilt nun $V(A) = V(A_g)$, so folgt aus

$$\varsigma_g(O(A) - O(\bar{A})) = - 2\varsigma_g R(\bar{A},A_g) \leq 0$$

$$O(A) \leq O(\bar{A})$$

Mithin gilt dann wegen $O(\bar{A}) \leq O(A)$: $O(A) = O(\bar{A})$

Dann folgt aber

$$R(\bar{A},A_g) = 0 \text{ und somit } \bar{A} = A_g$$

Nach A. Dinghas [2] ist A_g ein Rotationskörper um die x_n - Achse. Da A durch das einmalige Symmetrisieren von A an der Hyperebene $x_n = 0$ hervorging und $\bar{A} = A_g$ gilt, muß A schon selbst ein Rotationskörper sein. Dann gilt aber nach Dinghas [1] für A bereits die Gleichung (3.5). Daraus folgt aber $A = A_g$.

Damit ist das Resultat von A. Dinghas ohne die Voraus-

setzung der Trennbarkeit bewiesen.

3.) Der hyperbolische Fall

Zum Abschluß der Arbeit soll noch der Fall $K < 0$ behandelt werden. Es zeigt sich, daß dieser Fall weitaus weniger Schwierigkeiten aufweist, was die Definition eines Symmetrisierungsverfahrens anbelangt, als der elliptisch - sphärische Fall.
Einen Riemannschen Raum konstanter negativer Krümmung kann man von (1.1) durch $K = -|K|$ auf die Form

$$(3.8)\qquad \frac{x_{n+1}^2}{|K|} - x_1^2 - \ldots - x_n^2 = \frac{1}{|K|}$$

bringen. Setzen wir für $|K|$ wieder K mit $K > 0$, so erhält man für einen Riemannschen Raum konstanter negativer Krümmung die Darstellung

$$(3.9)\qquad \frac{x_{n+1}^2}{K} - x_1^2 - \ldots - x_n^2 = \frac{1}{K} \qquad (K > 0)$$

Eine zu (1.3) analoge Parameterdarstellung liefern uns die hyperbolischen Funktionen:

$$(3.10)\qquad \begin{aligned} x_1 &= x_1(\vartheta_1,\ldots,\vartheta_n) = \frac{1}{\sqrt{K}} \operatorname{sh}\sqrt{K}\vartheta_1 \\ x_i &= x_i(\vartheta_1,\ldots,\vartheta_n) = \frac{1}{\sqrt{K}} \Big(\prod_{\nu=1}^{i-1} \operatorname{ch}\sqrt{K}\vartheta_\nu\Big) \operatorname{sh}\sqrt{K}\vartheta_i \\ x_{n+1} &= x_{n+1}(\vartheta_1,\ldots,\vartheta_n) = \prod_{\nu=1}^{n} \operatorname{ch}\sqrt{K}\vartheta_\nu \end{aligned}$$

Der Fundamentalbereich F_h dieser Abbildung ist aber der ganze n - dimensionale euklidische Raum E^n. Hierin liegt aber ein wesentlicher rechentechnischer Vorteil:

1.) Die Zylindermannigfaltigkeit Z(a,b) bedarf keiner oberen Schranke.

2.) Definiert man die zu (2.9) analoge Transformation in einen euklidischen Modellraum, so ist ihr Fundamentalbereich ebenfalls der ganze euklidische Raum E^n; daraus folgt aber, daß man im hyperbolischen Fall auf die Bildung einer Äquivalenzrelation analog (2.13) bzw. (2.14) verzichten kann.

Die Steinersche Symmetrisierung wird nun wie im elliptisch-sphärischen Fall definiert und hat auch die gleichen Eigenschaften. (Vgl. A. Dinghas [4]) Da die Gleichung (3.5) auch für den hyperbolischen Fall gilt, kann man wie im zweiten Teil des dritten Kapitels schließen. Dann ist die Schmidtsche Aufgabe aber für alle Riemannschen Räume konstanter Krümmung gelöst.

Literaturverzeichnis

[1] A. Dinghas: Zum isoperimetrischen Problem in Räumen konstanter Krümmung.
Math. Zeitschr. 47, 1942

[2] A. Dinghas: Über eine isoperimetrische Aufgabe von Erhard Schmidt I.
Math. Zeitschr. 49, 1944

[3] A. Dinghas: Einfacher Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im euklidischen Raum von n Dimensionen.
Math. Nachr. Bd. 2, 1949

[4] A. Dinghas: Einfacher Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel in Riemannschen Räumen konstanter Krümmung.
Math. Nachr. Bd. 2, 1949

[5] A. Dinghas: Über einen Satz von Felix Behrend.
Math. Nachr. Bd. 2, 1949

[6] H. Hadwiger: Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie.
Springer Verlag. Berlin - Göttingen - Heidelberg 1957

Druck:

DISSERTATIONSDRUCKSTELLE
der Ernst-Reuter-Gesellschaft
der Förderer und Freunde
der Freien Universität Berlin e. V.
Pächter: Franz Augustin
1 Berlin 33, Garystr. 45